

2. Übungsblatt

Ausgabe: 8. Mai 2008
Besprechung: 16. Mai 2008

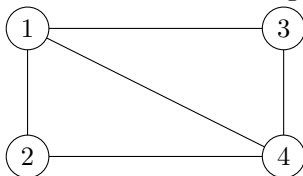
1. Aufgabe

- (a) Betrachten Sie den Graphen G aus dem Handout zum Matrix-Gerüst-Satz. Berechnen Sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes die Anzahl $t(G)$ der Spannbäume von G .

Tipp: Die Determinante einer 3×3 -Matrix kann man leicht nach der Regel von Sarrus berechnen:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- (b) Geben Sie alle Spannbäume von G an. Geben Sie dabei im Kontext des Beweises des Matrix-Gerüst-Satzes an, zu welcher Kantenkontraktion bzw. Kantenentfernung die einzelnen Bäume korrespondieren.
- (c) Betrachten Sie den folgenden Graphen H :



Geben Sie zu H die Laplacematrix an und berechnen sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes $L(H)^{2,2}$, und dann mit der Regel von Sarrus $t(H)$.

Gehen Sie nun schrittweise vor um zu dem selben Ergebnis zu gelangen (siehe Beweis von 3.3 oder Handout): Betrachten Sie dazu die Bedeutung von $t(H) = t(H/\{2,4\}) + t(H - \{2,4\})$ sowohl in Form der Matrixschreibweise als auch in Form der entsprechenden Graphen.

2. Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zusammenhängender Graph und A die zugehörige Adjazenzmatrix definiert durch:

$$A[u, v] := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \{u, v\} \in E \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Sei λ_i mit $1 \leq i \leq n$ die Eigenwerte von A . Geben Sie 'anschauliche' Formel für $\sum_{i=1}^n \lambda_i^j$ an, für $j = 0, 1, 2, 3$. Tipp: Folgt der heißen Spur!

3. Aufgabe Zwei Einbettungen \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 mit Facettenmengen F_1 und F_2 eines einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ gibt, so dass für jede Facette $f \in F_1$ und für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt: $\{u, v\}$ ist zu f inzident g.d.w. $\{u, v\}$ zu $\varphi(f)$ inzident ist.

Zeigen Sie: Alle Einbettungen eines 3-fach zusammenhängenden, einfachen planaren Graphen sind äquivalent. Tipp: *Betrachten Sie den induzierten Subgraphen einer Facette.*

4. Aufgabe (Satz von Euler, 1750) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $|V| = n$ und $|E| = m$ und sei \mathcal{E} eine planare Einbettung von G mit f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2 .$$

Beweisen Sie den Satz von Euler.