Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmik I

Algorithmen zur Visualisierung von Graphen
Sommer 2008

4. Übungsblatt

Ausgabe: 06. Juni 2008
Besprechung: 13. Juni 2008

Sichtbarkeitsrepräsentation

Das Ziel der Übung ist es einen Algorithmus für eine Sichtbarkeitsrepräsentation eines planaren s-t–Graphen zu entwickeln. Eine *Sichtbarkeitsrepräsentation* eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$ ist definiert durch:

- eine Menge von disjunkten achsen-parallelen Rechtecken (mit Einheitshöhe), welche die Knotenmenge V repräsentiert
- einer Menge von vertikalen Liniensegmenten, die sich höchstens in den Endpunkten berühren und die Kanten darstellen
- das Segment ℓ zur Kante (u, v) berührt / schneidet nur die Rechtecke, die zu den Knoten u und v gehören

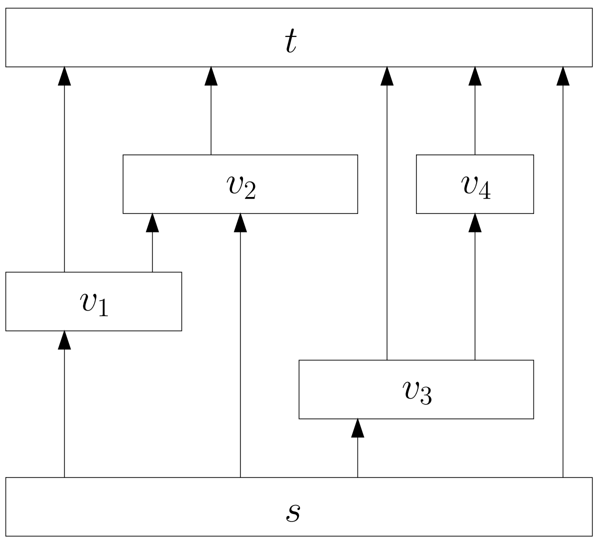

Abbildung 1: Beispiel einer Sichtbarkeitsrepräsentation

Sei im folgenden $D = (V, A)$ ein planarer s-t–Graph, d.h. ein planarer, azyklischer, gerichteter Graph mit genau einer Quelle s und einer Senke t. Weiterhin sei ohne Einschränkung D so eingebettet, dass die Kante (s, t) an der äußeren Facette angrenzt.

1. Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) D ist bimodal

(b) auf dem Rand jeder Facette f (von D) liegen genau eine Quelle $q(f)$ und eine Senke $z(f)$

2. Aufgabe

Zu D wird folgender *gerichteter Dualgraph* $D^* = (V^*, A^*)$ assoziiert:

- V^* ist die Menge aller Facetten von D, wobei die Facette rechts der Kante (s, t) als s^* und die Facette links der Kante (s, t) als t^* bezeichnet wird
- zu jeder Kante $e \in A$, die nicht zu s und t inzident ist, gibt es eine Kante $(l(e), r(e)) \in A^*$, wobei $l(e)$ die links-liegende Facette und $r(e)$ die rechts-liegende Facette bzgl. e bezeichnet; zusätzlich enthält A^* die Kante (s^*, t^*)

Zeigen Sie, dass D^* ein planarer s-t–Graph ist. Weiterhin seien f, g zwei Facetten in D. Erklären sie anschaulich die Bedeutung der folgenden vier Eigenschaften:

(1) D hat einen gerichteten Pfad von $z(f)$ nach $q(g)$

(2) D hat einen gerichteten Pfad von $z(g)$ nach $q(f)$

(3) D^* hat einen gerichteten Pfad von f nach g

(4) D^* hat einen gerichteten Pfad von g nach f

Zeigen Sie (formal), dass jedes Facettenpaar $\{f, g\}$ genau eine dieser Eigenschaften erfüllt. Betrachten Sie dazu eine topologische Nummerierung von D.

3. Aufgabe

Sei X eine ganzzahlige topologische Nummerierung von D^*, Y eine ganzzahlige topologische Nummerierung von D und $0 < \varepsilon < 0.5$ ein beliebiger Schwellwert. Weiter bezeichne für $v \in V$ $l(v)$ die Facette links der am weitesten links liegenden ausgehenden Kante von v sowie $r(v)$ die Facette rechts der weitesten rechts liegenden ausgehenden Kante von v.

Zeigen Sie, dass folgende Zuordnung eine Sichtbarkeitsrepräsentation von D ergibt:

- zeichne jeden Knoten $v \in V$ als Rechteck mit den Eckpunkten: $(X(l(v)) - \varepsilon, Y(v) - \varepsilon)$ und $(X(r(v)) - 1 + \varepsilon, Y(v) + \varepsilon)$
- zeichne jede Kante $e = (v, w) \in E$ als Liniesegment mit Endpunkten: $(X(l(e)), Y(v) + \varepsilon)$ und $(X(l(e)), Y(w) - \varepsilon)$